DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, x désigne une variable réelle positive

I

On pose $f(x, a) = \int_x^1 t^a e^{-t}\, dt$.

On ne cherchera pas à calculer explicitement $f(x, a)$ dans le cas général.

1° *a.* x étant fixé, strictement positif, différent de 1, étudier, sans utiliser la dérivée, le sens de variation de la fonction g, de la variable réelle a, définie par $g(a) = f(x, a)$.

b. La fonction g a-t-elle une limite si $a \to +\infty$?

c. La fonction g a-t-elle une limite si $a \to -\infty$? On distinguera les cas $x > 1$ et $x < 1$. Les résultats n'intervenant pas dans la suite du problème, seules seront prises en compte les démonstrations rigoureuses.

2° a étant fixé, on considère la fonction ψ_a de la variable x définie par

$$\psi_a(x) = f(x, a).$$

a. Pour quelles valeurs de a, ψ_a a-t-elle une limite lorsque $x \to 0$?

b. Pour ces valeurs de a, déterminer, lorsqu'elle existe, la limite quand $x \to 0$ de la dérivée $\psi'_a(x)$.

c. Déterminer les points d'inflexion éventuels de la courbe représentative de la fonction ψ_a lorsque x varie de 0 à 1.

d. Indiquer sur des graphiques distincts l'allure de la courbe représentative de la fonction ψ_a lorsque x varie de 0 à 1 dans les différents cas mis en évidence en *a.*, *b.*, *c.*

II

y désignant une fonction, au moins deux fois dérivable de la variable réelle x, on envisage l'équation différentielle (E)

$$(E) \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} - (x + a)\frac{dy}{dx} + ay = 0.$$

1° Que devient cette équation lorsqu'on y effectue le changement de fonction défini par $y = z.e^x$?

2° Exprimer à l'aide de ψ_a les solutions de l'équation différentielle ainsi obtenue. En déduire, à l'aide de ψ_a, la solution générale de (E).

3° On suppose $a = 2$, exprimer $\psi_2(x)$ à l'aide des fonctions usuelles puis la solution générale de E dans ce cas.

III

1° *a.* b étant un nombre réel, existe-t-il une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence non nul R telle que $a_0 = 1$ et telle que sa somme soit solution de l'équation différentielle (E') : $x\frac{d^2u}{dx^2} + (b - x)\frac{du}{dx} - u = 0$, sur l'intervalle $]-R, R[$? On déterminera les coefficients a_n de cette série.

b. Quel est le rayon de convergence de la série ?

2° On désigne par $g_b(x)$ la somme de cette série dans le domaine de convergence sans qu'il soit nécessaire de la calculer.

a. Calculer $bg_b(x) - xg_{b+1}(x)$.

b. Reconnaître $g_1(x)$.

c. En déduire $g_p(x)$ si p est un entier strictement positif.

3° Que devient l'équation différentielle E' si on fait le changement de fonction défini par $u = x^{1-b} Z$?

(On trouve une équation de type E.) En déduire la solution générale de E'.

4° *a.* Montrer, à l'aide des résultats obtenus au 1° et au 3° du III que l'on a

$$g_b(x) = (1 - b)\, x^{1-b} e^x \int_x^0 t^{b-2} e^{-t}\, dt.$$

b. Montrer que la fonction $e^{-x} x^{b-1} g_b(x)$ admet une limite $L(b)$ lorsque $x \to +\infty$.

c. Trouver la relation liant $L(b)$ et $L(b + 1)$.

d. En déduire $L(b)$ lorsque b est entier.

ENSI DE CHIMIE 1980 (Nancy et Sud TB)
-114-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail